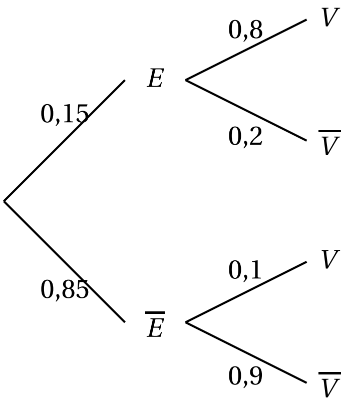
CORRECTION DU SUJET CENTRE ÉTRANGER JUIN 2013

Correction de l'exercice 1

1. $U_1 = 0,875\,U_0 + 1200 = 0,875 \times 40000 + 1200 = 36200$ donc $\boxed{U_1 = 36200}$. La bonne réponse est donc la réponse **c**.
2. On note que $U_n = V_n + 9600$.
   $V_{n+1} = U_{n+1} - 9600 = 0,875 \times U_n + 1200 - 9600 = 0,875 \times (V_n + 9600) - 8400 = 0,875 \times V_n + 8400 - 8400$ donc $V_{n+1} = 0,875 \times V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $0,875$. La bonne réponse est la réponse **b**.
   Le premier terme est donc $V_0 = U_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$
3. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = 30400 \times 0,875^n$, or $U_n = V_n + 9600$ donc $U_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$.
   Notons que $0 < 0,875 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,875^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 9600}$. La bonne réponse est la réponse **d**.
4. La bonne réponse est la réponse **c**.
5. $U_{32} = 30400 \times 0,875^{32} + 9600 \approx 10024 > 10000$ et $U_{33} = 30400 \times 0,875^{33} + 9600 \approx 9971 < 10000$ donc la valeur affichée est la valeur de N égale à $\boxed{33}$. La bonne réponse est la réponse **a**.

Correction de l'exercice 2

1. On sait que
   - 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés donc $\boxed{p(E) = 0,15 \text{ et } p\left(\overline{E}\right) = 0,85}$.
   - Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes donc $\boxed{p_E(V) = 0,8 \text{ et } p_E\left(\overline{V}\right) = 0,2}$.
   - Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes donc $\boxed{p_{\overline{E}}(V) = 0,1 \text{ et } p_{\overline{E}}\left(\overline{V}\right) = 0,9}$.
2. L'arbre est donc



3. $E \cap V$ est le sac de pommes est vendu dans l'exploitation agricole **et** les pommes sont de variétés différentes.
   $p(E \cap V) = p(E) \times p_E(V) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$ donc $\boxed{p(E \cap V) = 0,12}$.
4. $p(V) = p(E \cap V) + p\left(\overline{E} \cap V\right) = 0,12 + p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(V) = 0,12 + 0,85 \times 0,1 = 0,205$ donc $\boxed{p(V) = 0,205}$.
5. Notons que $p\left(\overline{V}\right) = 1 - p(V) = 0,795$.
   On cherche $p_{\overline{V}}(E) = \dfrac{p\left(E \cap \overline{V}\right)}{p\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,15 \times 0,2}{0,795} \approx 0,038$ donc $\boxed{p_{\overline{V}}(E) \approx 0,038}$.
6. Un sac de pommes est donc vendu en moyenne, en euros,
   $0,8 \times p(E) + 3,40 \times p\left(\overline{E}\right) = 0,8 \times 0,15 + 3,40 \times 0,85$ soit $3,01$ euros en moyenne
   donc pour 45000 sacs les producteurs peuvent prévoir un montant de $45000 \times 3,01$ soit un montant de $\boxed{135450 \text{ euros}}$.

Correction de l'exercice 3

1. On note que la fonction f est du type $\dfrac{u}{v}$, la dérivée est donc $\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

$f'(x) = \dfrac{(-2x+10) \times x^2 - (-x^2+10x-16) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}$

donc $f'(x) = \dfrac{-10x^2+32x}{x^4} = \dfrac{x \times (-10x+32)}{x \times x^3} = \dfrac{-10x+32}{x^3}$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-10x+32}{x^3}}$.

2. (a) Sur $[2~;~8]$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-10x+32$ d'où le signe de $f'(x)$, en notant que le signe de $a = -10 < 0$.

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	

(b) D'où le tableau de variation de la fonction f.

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	0,5625	↘	0

3. (a) $f''(x) = \dfrac{20x-96}{x^4}$, notons que $x^4 > 0$ sur $[2~;~8]$ donc f'' est du signe de $20x-96$ (qui s'annule pour 4,8) donc on peut dresser le tableau de variation de la fonction f' sur $[2~;~8]$.

x	2		4,8		8
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	

La fonction f' est croissante sur $[4,8~;~8]$ donc la fonction f est convexe sur $[4,8~;~8]$.

(b) La fonction f' est décroissante sur $[2~;~4,8]$ puis croissante sur $[4,8~;~8]$ donc la fonction f est concave sur $[2~;~4,8]$ puis convexe sur $[4,8~;~8]$ donc le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4. (a) $F'(x) = -1 + 10 \times \dfrac{1}{x} + 16 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -1 + \dfrac{10}{x} - \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$ donc $\boxed{F'(x) = f(x)}$ donc la fonction F est une primitive de f sur $[2~;~8]$.

(b) $I = \displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -8 + 10\ln 8 + 2 - (-2 + 10\ln 2 + 8)$

$I = -8 + 10\ln 8 + 2 + 2 - 10\ln 2 - 8 = -12 + 10\ln 8 - 10\ln 2$ donc $\boxed{I = -12 + 10\ln 4 \approx 1,86}$.

Correction de l'exercice 4

1. (a) On cherche donc $p(D < 60) = p(20 < D < 60) = \dfrac{60-20}{120-20} = 0,4$ donc la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes est $\boxed{0,4}$.

(b) $E(D) = \dfrac{120+20}{2} = 70$ donc en moyenne les quatre joueurs sont réunis au bout de 70 secondes.

2. (a) J a pour espérance 120 et son écart-type est donc 20.

(b) $90 < J < 180 \iff 90 - 120 < J - 120 < 180 - 120 \iff \dfrac{-30}{20} < \dfrac{J-120}{20} < \dfrac{60}{20}$

$\iff -1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3$

donc $\boxed{90 < J < 180 \iff -1,5 < \dfrac{J-120}{20} < 3}$.

(c) X suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, soit la loi normale centrée réduite.

(d) $p(90 < J < 180) \approx 0,932$.